

Принцип Дирихле

Знаете ли вы, что среди зрителей, сидящих в Большом театре во время спектакля, обязательно есть люди, родившиеся в один и тот же день одного и того же месяца? Подсчитаем: в зале большого театра 2000 мест. И даже если не все они заполнены (что в этом знаменитом театре бывает нечасто), можно смело утверждать, что на спектакле собралось более 366 человек. Но 366 - это максимально возможное число дней в году, считая 29 февраля. Итак, для 367-го зрителя просто не остаётся свободной от дней рождений его соседей по залу даты в году.

Просто? Тем не менее это рассуждение даже имеет своё название в математике: **принцип Дирихле** (в честь немецкого математика Иоганна Петера Густава Лежёна Дирихле). По традиции принцип Дирихле почему-то всегда объясняют на примере кроликов в клетках: если общее число кроликов больше числа клеток, в одной из этих клеток наверняка сидит более одного кролика.

Также этот принцип может выглядеть следующим образом: в n клетках невозможно рассадить поодиночке $n+1$ кроликов, т.е найдётся клетка, где сидят не менее двух кроликов.

Этот принцип можно сформулировать в терминах отображений между множествами: при отображения множества P , содержащего $n+1$ элементов, в множество Q , содержащее n элементов, найдутся два элемента множества P , имеющие один и тот же образ.

Таким образом, чтобы применить принцип Дирихле к решению задач, надо указать, что принимать за "клетки", а что за "кроликов", а также указать способ, которым надо усаживать "кроликов" в "клетки". В терминах отображений между множествами это означает, что надо указать не только множества P и Q , но и задание отображение между ними.

Задача 1. В клетках таблицы 3×3 расставлены числа: -1 , 0 и 1 . Рассмотрим восемь сумм: суммы трёх чисел в каждой строке, в каждом столбце и по двум диагоналям. Могут ли быть все эти суммы различными?

Решение. Предположим, что "клетками" будут все различные значения всех трех чисел, каждое из которых принимает значение 0 , 1 или -1 . Этих значений будет 7: -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 . А "кроликами" будут наборы из трёх чисел, расположенные в одном столбце, или в одной строке, или по одной из двух диагоналей таблицы. Рассаживаем кроликов в клетки, где значение суммы равно сумме чисел этого "кролика"-набора. Тогда согласно принципу Дирихле найдётся "клетка", где сидят не менее двух кроликов. А это значит, что найдутся две рассматриваемые тройки чисел, для которых суммы равны. Итак, все суммы различными быть не могут.

Задача 2. Шесть школьников съели семь конфет. Докажите, что один из них съел не менее двух конфет.

Решение. Возьмём за "клетки" школьников, а за "кроликов" конфеты. Используя принцип Дирихле получим, что найдётся "клетка", где сидят не менее двух "кроликов". А это и означает, что найдётся школьник, который съел хотя бы две конфеты.

Задача 3. В классе 15 учеников. Найдется ли месяц, в котором отмечают свои дни рождения не меньше, чем два ученика этого класса?

Решение. Пусть "клетками" будут месяцы, а "кроликами" - ученики. Используя принцип Дирихле получим, что найдётся "клетка", где сидят не менее двух "кроликов". А это и означает, что найдётся месяц, в котором отмечают свои дни рождения хотя бы два ученика.

Задача 4. В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой из них не более 600000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым числом иголок.

Решение. Примем за "клетки" количество иголок. Всего "клеток" будет 600001 ($0, 1, 2, \dots, 600000$). А за "кроликов" ёлки. Используя принцип Дирихле получим, что найдётся "клетка", где сидят не менее двух "кроликов". А это и

означает, что найдутся две ёлки имеющие одинаковое количество иголок.

Задача 5. Из любых трёх целых чисел можно выбрать два, сумма которых чётна. Докажите это.

Решение. За "клетки" примем чётность чисел, их две (чётные числа и нечётный). За "кроликов" - числа. Используя принцип Дирихле получим, что в какой-то из двух "клеток" будет по одинаковому числу "кроликов". Это означает, что найдутся два числа одинаковой чётности. А если имеется два числа одинаковой чётности, то сумма этих чисел будет чётной.

В выше представленных задачах нужно было только найти что принять за "кроликов", а что за "клетки", и применить принцип Дирихле. В следующей задаче надо не только найти что принять за "кролики" и за "клетки", но и найти верное количество клеток.

Задача 6. Докажите, что в Вашем классе найдутся два человека, имеющие одинаковое число друзей среди своих одноклассников.

Решение. Предположим, что в классе 30 человек, тогда за "кроликов" возьмём учеников, а за "клетки" количество друзей. Друзей у каждого человека может быть $0, 1, \dots, 29$ т.е. у нас получится 30 "клеток". Но "клетки" 29 и 0 одновременно существовать не могут т.к. если человек имеет 29 друзей, то каждый из его друзей будет иметь хотя бы одного друга, значит всего может быть 29 "клеток" (0, 1, ..., 28 или 1, 2, ..., 29). Используя принцип Дирихле получим, что найдётся "клетка", где сидят не менее двух "кроликов". А это и означает, что найдутся два человека имеющие одинаковое число друзей.

Можно сделать вывод, что в задачах на принцип Дирихле надо правильно распределить что будет "кроликами", а что "клетками". Также чтобы решить задачу на принцип Дирихле, надо найти правильное число "кроликов" и "клеток" исходя из условия задачи.

Обобщенный принцип Дирихле

Чаще всего в задачах применяется не Принцип Дирихле, а некоторое его свойство, которое называется обобщённый принцип Дирихле.

Рассмотрим задачи с применением не принципа Дирихле, а некоторого его обобщения, которое сформулировано ниже, и которое обычно встречается в задачах.

Обобщение принципа Дирихле: даны n клеток и $nk + 1$ кроликов размещены в эти клетки. Тогда найдется клетка, где сидят не менее $k + 1$ кроликов.

Задача 1. В классе учится 29 человек. Саша Иванов допустил в диктанте 13 ошибок, и никто другой не сделал большего числа ошибок. Доказать, что по крайней мере трое учащихся сделали одинаковое число ошибок.

Решение. Примем за "клетки" всевозможные варианты количества ошибок. Их 14, так как школьники могут сделать 0, 1, ..., 13 ошибок. А за "кроликов" примем школьников, которые писали диктант. Их по условию 29. Каждого из них сажаем в клетку, которая соответствует количеству ошибок сделанных им. Тогда получим, что найдётся "клетка", в которой сидят по меньшей мере три "кролика", а это и означает, что найдутся трое школьников, сделавших одинаковое число ошибок.

Задача 2. В пяти классах школы учатся 160 человек. Доказать, что найдутся 4 человека, у которых день рождения приходится на одну и ту же неделю.

Решение. В году может быть максимально 53 недели. Их и примем за "клетки" а, за "кроликов" примем ребят. Рассаживаем "кроликов" по тем "клеткам", которые соответствуют их дням рождения. В силу принципа Дирихле найдётся "клетка" по меньшей мере с четырьмя "кроликами", а это и означает, что найдётся неделя, когда день рождения сразу у четырёх человек.

Задача 3. У человека на голове не более 400000 волос, в Москве более 8 млн. жителей. Докажите, что найдутся 20 москвичей с одинаковым числом волос.

Решение. По условию на голове у каждого из москвичей может быть от 0 до 400000 волос имеем всего 400001 возможность. Предположим, что утверждение задачи неверно. Тогда лысых москвичей найдется не более 19, имеющих 1 волос тоже не более 19, ..., имеющих 400000 волос тоже не более 19. Но тогда всего москвичей не более $19 \times 400001 = 7600019$, что меньше 8 миллионов противоречие.

При решении задач с использованием принципа Дирихле можно поступать двояко:

1) Допускать противное и вычисляем, сколько необходимо значений. Сравнивая с данными условиями, приходим к противоречию (задачи 1, 2).

2) Выбирать, что принять за "клетки" и что взять за "кроликов". Применяя непосредственно принцип Дирихле, устанавливаем существование того, что искали (задача 3).

Также с помощью принципа Дирихле можно решать задачи, в которых надо достать какое либо количество предметов разного цвета или типа (например: пары носков или перчаток разных цветов). Данные задачи приведены ниже.

Задача 4. В ящике лежат 10 пар чёрных и 10 пар красных перчаток одного размера. Сколько перчаток надо вытащить из ящика наугад, чтобы наверняка среди них были:

- а) Две перчатки одного цвета;
- б) Одна пара перчаток одного цвета;
- в) Одна пара перчаток разных цветов?

Решение. а) Если за "клетки" принять цвета перчаток, то, взяв любые три перчатки, получится, что в одной из "клеток" находятся два "кролика"-перчатки. А это и требуется.

б) Можно взять 20 перчаток на одну руку и из них нельзя будет выбрать одноцветную пару перчаток, поэтому искомое число не меньше 21. Доказать, что число 21 является искомым.

Примем за "клетки" цвета перчаток (их два). В качестве "кроликов" возьмём перчатки. Согласно обобщённому принципу Дирихле в одной из "клеток" будет не меньше 11 "кроликов". Это означает, что найдётся 11 перчаток одного цвета. Но имеется только 10 пар перчаток одного цвета, поэтому все они не могут быть на одну руку. Значит, среди этих 11 перчаток найдётся одна пара перчаток одного цвета.

в) Можно взять 20 перчаток на одну руку и из них нельзя будет выбрать разноцветную пару перчаток, поэтому искомое число не меньше 21. Доказать, что число 21 является искомым.

Из всех перчаток можно составить разноцветные пары. Разделим пары на две группы. В первую группу будут входить пары у в которых правая перчатка чёрная, а левая красная. Во вторую группу - пары у в которых правая перчатка красная, а левая чёрная. Эти группы и будут "клетками", а "кроликами" будут перчатки. Согласно обобщённому принципу Дирихле в одной из "клеток" будет не меньше 11 "кроликов". Это означает, что найдётся 11 перчаток из одной группы. Но имеется только 10 пар перчаток данной группы, поэтому все они не могут быть на одну руку или одного цвета. Значит среди этих 11 перчаток найдётся пара перчаток разных цветов.

Задача 5. Возникает вопрос: а если добавить к этим перчаткам ещё 10 пар белых перчаток? Какое количество перчаток нужно было бы тогда вытащить, чтобы среди них наверняка были:

- а) Две перчатки одного цвета;
- б) Одна пара перчаток одного цвета;
- в) Одна пара перчаток разных цветов?

Решение. а) Если за "клетки" принять цвета, а за "кроликов" перчатки, то, выбирая 4 любых "кролика"-перчатки, получится, что в одной "клетке" находится по крайней мере два "кролика". Значит, искомое число равно 4.

(Ясно, что из трёх разноцветных перчаток нельзя найти двух перчаток одного цвета).

б) Можно взять 30 перчаток на одну руку и из них нельзя будет выбрать одноцветную пару перчаток, поэтому искомое число не меньше 31. Доказать, что число 31 является искомым.

Примем за "клетки" цвета перчаток (их три). В качестве "кроликов" возьмём перчатки. Согласно обобщённому принципу Дирихле в одной из "клеток" будет не меньше 11 "кроликов". Это означает, что найдётся 11 перчаток одного цвета. Но имеется только 10 пар перчаток одного цвета, поэтому все они не могут быть на одну руку. Значит, среди этих 11 перчаток найдётся одна пара перчаток одного цвета.

в) Можно взять 30 перчаток на одну руку и из них нельзя будет выбрать разноцветную пару перчаток, поэтому искомое число не меньше 31. Доказать, что число 31 является искомым.

Из всех перчаток можно составить разноцветные пары. Разделим пары на три группы. В первую группу будут входить пары в которых правая перчатка чёрная, а левая любого другого цвета. Во вторую группу - пары в которых правая перчатка красная, а левая любого другого цвета. В третью группу - пары в которых правая перчатка белая, а левая любого другого цвета. Эти группы и будут "клетками", а "кроликами" будут перчатки. Согласно обобщённому принципу Дирихле в одной из "клеток" будет не меньше 11 "кроликов". Это означает, что найдётся 11 перчаток из одной группы. Но имеется только 10 пар перчаток данной группы, поэтому все они не могут быть на одну руку или одного цвета. Значит среди этих 11 перчаток найдётся пара перчаток разных цветов.

Чаще в задачах применяется обобщённый принцип Дирихле. С помощью данных принципов можно решать различные задачи в том числе и задачи на вытягивание предметов. Задачи на данные принципы можно решать и методом от противного.